Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
для проведения в 2026 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов по математике 2026 года

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме и уровне сложности.

Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2026 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов — в кодификаторах элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников организаций образования для проведения единого государственного экзамена 2026 г. по математике.

Экзаменационная работа состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий. Определяющим признаком каждой части работы является форма заданий:

- часть 1 содержит 12 заданий (задания 1–12) с кратким ответом;
- часть 2 содержит 4 задания (задания 13–16) с кратким ответом и пять заданий (задания 17–21) с развёрнутым ответом.

По уровню сложности задания распределяются следующим образом: задания 1–12 имеют базовый уровень, задания 13–20 – повышенный уровень, задание 21 относятся к высокому уровню сложности.

Задание с кратким ответом (1-16) считается выполненным, если в бланке ответов № 1 зафиксирован верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Правильное решение каждого из заданий 1-16 оценивается одним баллом.

Правильное решение каждого из заданий 17 - 18 оценивается- 2 баллами; 19 и 20 — 3 баллами и 21 —4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 30 баллов.

Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, предлагается одно из возможных решений.

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 12 заданий базового уровня сложности с кратким ответом.

Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 5 заданий повышенного и высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Ответы к заданиям 1–16 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

Ответ: *–0,8*.

При выполнении заданий 17–21 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к заданиям 1–16 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Простейшие задачи.

По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 16 руб. Если на счету осталось меньше 16 руб., то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счету было 300 руб. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

Решение.

300/16 = 18,75, но так как 75% от 16 рублей (т. е. 12 рублей) не хватит, чтобы оплатить день общения - делаем вывод, что Лизе этих денег хватит на 18 дней.

Ответ: 18

или

Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Решение.

Больному нужно выпить 0,5 · 3 · 21 = 31,5 г лекарства. В одной упаковке содержится 0,5 · 10 = 5 г лекарства. Разделим 31,5 на 5:

$$\frac{31,5}{5}=\frac{315}{50}=\frac{300+15}{50}=\frac{300}{50}+\frac{3}{10}=6,3.$$

Значит, на курс лечения необходимо 7 упаковок.

Ответ: 7.

2. *Задачи на проценты.*

Клиент взял в банке кредит 12 000 рублей на год под 16%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение.

Через год клиент должен будет выплатить 12 000 + 0,16 . 12 000 = 13 920 рублей. Разделим 13 920 руб. на 12 мес.:

$$\frac{13\,920}{12}=1160$$ руб./мес.

Значит, клиент должен вносить ежемесячно в банк 1160 рублей.

Ответ: 1160.

или

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

Решение.

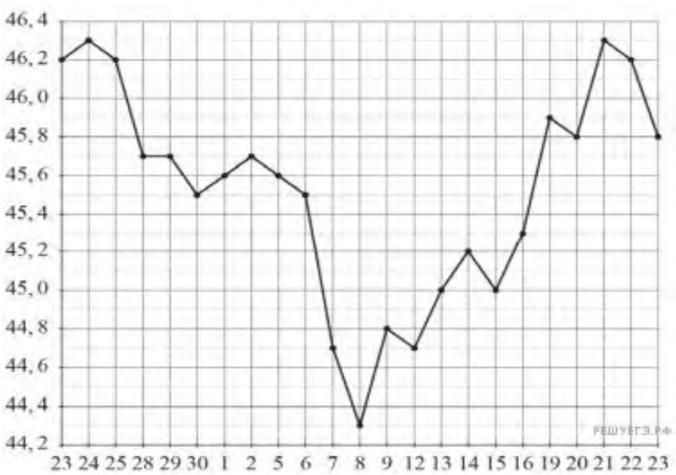
Пусть заработная плата Марии Константиновны составляет x рублей. Тогда $x-0,13x=9570 \Leftrightarrow 0,87x=9570 \Leftrightarrow x=9570:0,87 \Leftrightarrow x=11000.$

Значит, зарплата Марии Константиновны составляет 11 000 рублей.

Ответ: 11 000.

3. *Чтение графиков и диаграмм.*

На рисунке жирными точками показан курс китайского юаня, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 23 сентября по 23 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена китайского юаня в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс китайского юаня за указанный период. Ответ дайте в рублях.



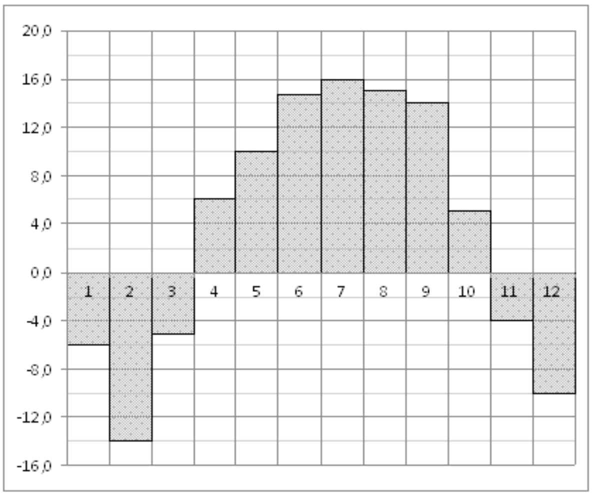
Решение.

Из рисунка видно, что наименьший курс китайского юаня был установлен 8 октября и составил 44,3.

Ответ:44,3

или

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 4 градуса Цельсия.



Решение.

Из диаграммы видно, что было 7 месяцев, когда среднемесячная температура превышала 4 градуса Цельсия (см. рисунок).

Ответ: 7.

4. *Работа с формулами.*

Теорему косинусов можно записать в виде, $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$ где *a. b и c* — стороны треугольника, а γ — угол между сторонами *a и b*. Пользуясь этой формулой, найдите величину $\cos\gamma$ если *a* = 5, *b* = 8 и с = 7.

Решение.

Подставим данные величины *a, b, c* в формулу: $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$. Получаем:

$$\cos\gamma = \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8} = \frac{25+64-49}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Ответ: 0,5

или

Среднее геометрическое трёх чисел *a, b и c.* вычисляется по формуле g = $\sqrt[3]{abc}$. Вычислите среднее геометрическое чисел 12, 18, 27.

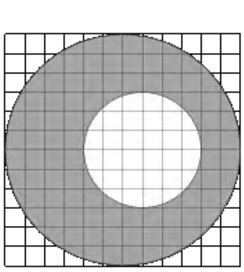
Решение.

Подставим значения в формулу и вычислим:

$$g = \sqrt[3]{12\cdot18\cdot27} = \sqrt[3]{4\cdot3\cdot2\cdot9\cdot9\cdot3} = \sqrt[3]{2^3\cdot3^6} = 2\cdot3^2 = 18.$$

Ответ: 18.

5. *Квадратная решётка, координатная плоскость.*



На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

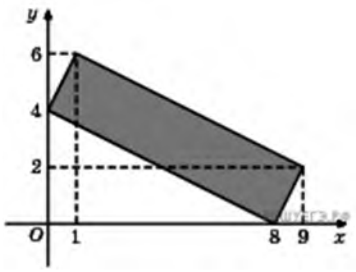
Решение.

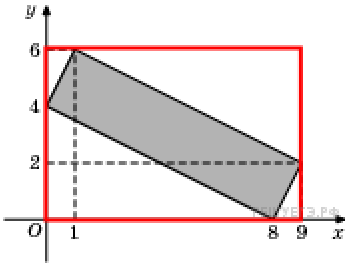
Площади кругов относятся как квадраты их радиусов. Радиус внешнего круга равен 6, радиус внутреннего равен 3. Поскольку радиус большего круга вдвое больше радиуса наименьшего круга, площадь большего круга вчетверо больше площади меньшего. Следовательно, она равна 4. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площадей кругов: $4-1=3$.

Ответ: 3.

или

Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (8; 0), (9; 2), (1; 6), (0; 4).





Решение.

Площадь четырехугольника равна разности площади прямоугольника и четырех прямоугольных треугольников. Поэтому

$S=6\cdot 9-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8=20$ см^2.

Ответ: 20

6. Начала теории вероятностей.

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение.

За первые три дня будет прочитан 51 доклад, на последние два дня планируется 24 доклада. Поэтому на последний день запланировано 12 докладов. Значит, вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции, равна $\frac{12}{75}=0{,}16$

Ответ: 0,16.

или

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Решение.

Обозначим «1» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Физиком», другую сторону монеты обозначим «0». Тогда благоприятных комбинаций три: 110, 101, 011, а всего комбинаций $2^3=8$: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Тем самым, искомая вероятность равна:

$\frac{3}{8}=0{,}375.$

Ответ: 0,375.

7. Простейшие уравнения.

Найдите корень уравнения: $x=\frac{6x-15}{x-2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

Решение.

Область допустимых значений: $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$. При $x\neq 2$ помножим на знаменатель:

$$x=\frac{6x-15}{x-2}\Leftrightarrow x(x-2)=6x-15\Leftrightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5; \\ x=3. \end{array}\right.$$

Оба корня лежат в ОДЗ. Больший из них равен 5.

Ответ: 5.

<u>или</u>

Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение.

Возведем в квадрат:

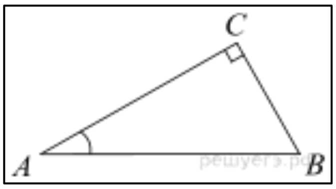
$$\sqrt{-72-17x}=-x\Leftrightarrow \begin{cases} -72-17x=x^2, \\ -x\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+17x+72=0, \\ x\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=-8, \end{array}\right. \\ x\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=-8. \end{array}\right.$$

Ответ: −9.

<u>8. *Планиметрия : задачи , связанные с углами*</u>.

В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$

***BC* = 5. Найдите *AC*.**



Решение.

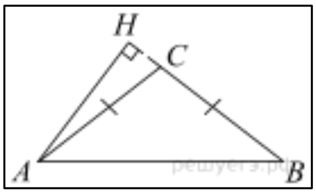
Имеем:

$$AC=\frac{BC}{\operatorname{tg}A}=\frac{BC\cos A}{\sin A}=\frac{BC\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}=\frac{5\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{1-\frac{5}{25}}}=5\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{2\sqrt{5}}=2,5.$$

Ответ: 2,5.

или

В треугольнике *ABC* *AC* = *BC*, *AB* = 10, высота *AH* равна 3. Найдите синус угла *BAC*.



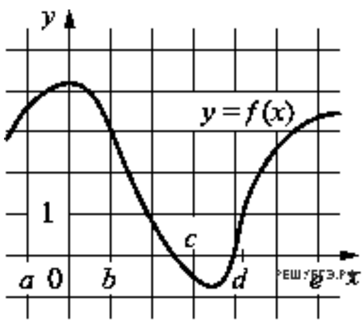
Решение.

Треугольник *ABC* равнобедренный, значит, углы *BAC* и *ABH* равны как углы при его основании.

$$\sin\angle BAC=\sin\angle ABH=\frac{AH}{AB}=\frac{3}{10}=0,3.$$

Ответ: 0,3.

<u>9. Анализ графиков и диаграмм.</u>



На рисунке изображён график функции *y* = *f*(*x*). Числа *a*, *b*, *c*, *d* и *e* задают на оси *x* четыре интервала. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу характеристику функции или её производной.

Ниже указаны значения производной в данных точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной в ней.

ТОЧКИ	**ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ИЛИ ФУНКЦИИ.**
А) (*a*; *b*) **Б) (*b*; *c*)** **В) (*c*; *d*)** **Г) (*d*; *e*)**	1) производная отрицательна на всём интервале 2) производная положительна в начале интервала и отрицательна в конце интервала 3) функция отрицательна в начале интервала и положительна в конце интервала 4) производная положительна на всём интервале

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Пояснение.

Если функция возрастает, то производная положительна и наоборот.

На интервале (a;b) производная положительна вначале интервала и отрицательна в конце, потому что функция вначале возрастает, а потом убывает.

На интервале (b;c) производная отрицательна, потому что функция убывает.

На интервале (c;d) функция отрицательна в начале интервала и положительна в конце интервала.

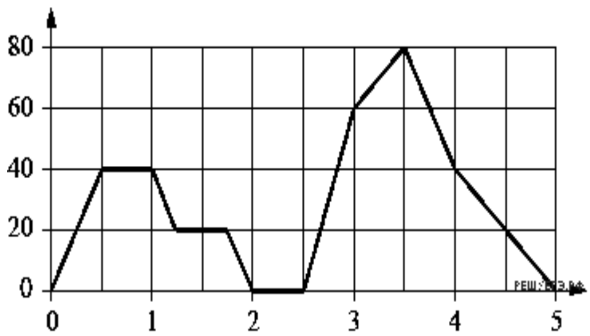
На интервале (d;e) производная положительна, потому что функция возрастает.

Таким образом, получаем соответствие А — 2, Б — 1, В — 3 и Г — 4.

Ответ: 2134.

или

На графике изображена зависимость скорости движения легкового автомобиля на пути между двумя городами от времени. На вертикальной оси отмечена скорость в км/ч, на горизонтальной — время в часах, прошедшее с начала движения автомобиля.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику движения автомобиля на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ	**ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ**
А) второй час пути **Б) третий час пути** **В) четвёртый час пути** **Г) пятый час пути**	1) автомобиль не разгонялся, и некоторое время ехал с постоянной скоростью 2) скорость автомобиля постоянно снижалась 3) автомобиль сделал остановку 4) скорость автомобиля достигла максимума за всё время движения

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Пояснение.

На протяжении второго часа пути автомобиль не разгонялся и некоторое время ехал с постоянной скоростью.

На протяжении третьего часа пути автомобиль остановился, а затем продолжил движение.

На протяжении четвертого часа пути автомобиль набрал максимальную скорость.

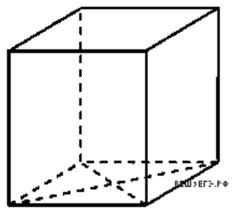
На протяжении пятого часа пути скорость автомобиля падала.

Таким образом, получаем соответствие: А — 1, Б — 3, В — 4 и Г — 2.

Ответ: 1342.

10. Стереометрия.

В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.



Решение.

Сторона ромба a выражается через его диагонали d_1 и d_2 как $a=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}=5$. Площадь ромба $S_P=\frac{1}{2}d_1d_2=24$.

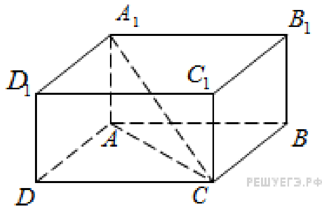
Тогда боковое ребро найдем из выражения для площади поверхности:

$S=2S_{\text{ромба}}+4aH \Leftrightarrow H=\frac{S-2S_{\text{ромба}}}{4a}=\frac{248-48}{20}=10$.

Ответ: 10.

или

В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA₁B₁C₁D₁* известно, что *DD₁=1, CD=2, AD=2* Найдите длину диагонали *CA₁*



Решение.

Найдем диагональ AC прямоугольника $ABCD$. По теореме Пифагора $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{8}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник A_1AC. По теореме Пифагора

$$CA_1=\sqrt{CA^2+AA_1{}^2}=\sqrt{8+1}=3.$$

Ответ: 3.

11. Выбор оптимального варианта

Для транспортировки 45 тонн груза на 1300 км можно воспользоваться услугами одной из трех фирм-перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

Перевозчик	**Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)**	**Грузоподъемность автомобилей (тонн)**
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

Решение.
Рассмотрим все варианты.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *А* понадобится 13 автомобилей. Стоимость перевозки каждым из них составит $32 \cdot 1300 = 41\,600$ руб. Полная стоимость перевозки $41\,600 \cdot 13 = 540\,800$ руб.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *Б* понадобится 9 автомобилей. Стоимость перевозки каждым из них составит $41 \cdot 1300 = 53\,300$ руб. Полная стоимость перевозки $53\,300 \cdot 9 = 479\,700$ руб.

Для перевозки 45 тонн груза перевозчику *В* понадобится 4 автомобиля. Стоимость перевозки каждым из них составит $95 \cdot 1300 = 123\,500$ руб. полная стоимость перевозки $123\,500 \cdot 4 = 494\,000$ руб.

Стоимость самой дешевой перевозки составит 479 700 руб.

Ответ: 479 700.

или

В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	**Тверь**	**Липецк**	**Барнаул**
Пшеничный хлеб (батон)	11	12	14
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина) (1 кг)	260	280	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

В Твери стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $11 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 260 + 1 \cdot 38 = 477$ руб.

В Липецке стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $12 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 280 + 1 \cdot 44 = 527$ руб.

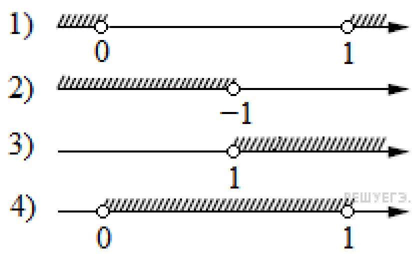
В Барнауле стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $14 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 300 + 1 \cdot 50 = 576$ руб.

Самый дешёвый набор продуктов можно купить в Твери по цене 477 руб.

Ответ: 477

<u>12. Простейшие неравенства</u>

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений из правого столбца. Установите соответствие между неравенствами и множествами их решений.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\log_2 x > 0$ Б) $2^{-x} > 2$ В) $\frac{x}{x-1} < 0$ Г) $\frac{1}{x(x-1)} > 0$	

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Решение.

Решим неравенства:

А) $\log_2 x > 0 \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 1 \Leftrightarrow x > 1$

Б) $2^{-x} > 2 \Leftrightarrow 2^{-x} > 2^1 \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$

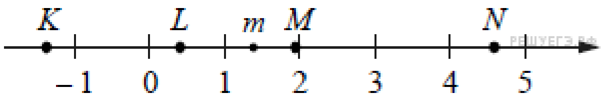
В) $\frac{x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Г) $\frac{1}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 1. \end{array}\right.$

Ответ: 3241.

или

На прямой отмечено число *m* и точки *K, L, M* и *N*.



ТОЧКИ	ЧИСЛА
А) *K*	1) $6 - m$
Б) *L*	2) m^2
В) *M*	3) $m - 1$
Г) *N*	4) $-\frac{2}{m}$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Решение.

Заметим, что $1 < m < 2,$ значит, $4 < 6 - m < 5,\ 1 < m^2 < 4,\ 0 < m - 1 < 1,\ -2 < -\frac{2}{m} < -1.$

Ответ: 4321.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

ЧАСТЬ 2

Ответом на задания 13– 16 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

13. Вычисления и преобразования

Найдите ***61a-11b+50*, если** $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5}$**.=9**

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5}=9\Rightarrow 2a-7b+5=63a-18b+45\Rightarrow 61a-11b+40=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 61a-11b+50=10.$$

Ответ: 10.

или

Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2}{10+\sqrt{91}}$

Решение.

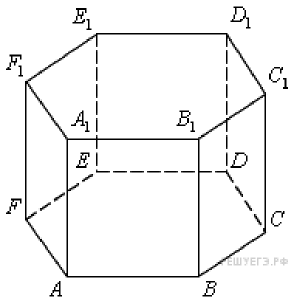
Выполним преобразования:

$$\frac{(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2}{10+\sqrt{91}}=\frac{13+2\sqrt{91}+7}{10+\sqrt{91}}=\frac{20+2\sqrt{91}}{10+\sqrt{91}}=\frac{2(10+\sqrt{91})}{10+\sqrt{91}}=2.$$

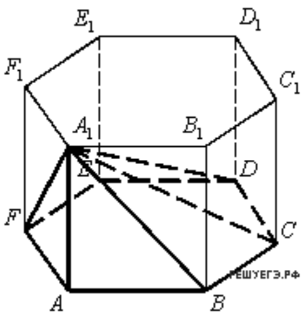
Ответ: 2.

14. Стереометрия.

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки *A, B, C, D, E, F,* A_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания которой равна *4*, а боковое ребро равно *3*.



Решение.



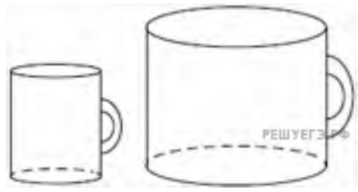
Основание пирамиды такое же, как основание правильной шестиугольной призмы, и высота у них общая. Поэтому

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{пр}}h_{\text{пр}}=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3=4.$$

Ответ: 4.

или

Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка в полтора раза ниже второй, а вторая вдвое шире первой. Во сколько раз объём второй кружки больше объёма первой?



Решение.

Объём цилиндра вычисляется по формуле $V=\pi r^2h.$ Объём первой кружки равен $V_1=\pi r_1^2h_1,$ объём второй кружки равен $V_2=\pi r_2^2h_2=\pi(2r_1)^2\frac{3}{2}h_1=6\pi r_1^2h_1=6V_1.$ Значит, объём второй кружки в шесть раз больше объёма первой.

Ответ: 6.

15. ***Наибольшее и наименьшее значение функции.***

Найдите наименьшее значение функции $y = 4\,\mathrm{tg}x - 4x - \pi + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{4}{\cos^2 x} - 4 = 4\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 4\,\mathrm{tg}^2\,x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является $y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4\,\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cdot\frac{\pi}{4} - \pi + 5 = 1.$

Ответ: 1.

или

Найдите точку минимума функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$.

Решение.

Заметим, что $y = 3x - 3\ln(x+3)$.

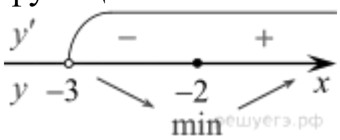
Область определения функции — открытый луч $(-3;+\infty)$.

Найдем производную заданной функции: $y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}$.

Найдем нули производной: $3 - \frac{3}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Найденная точка лежит на луче $(-3;+\infty)$.

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -2$.

Ответ: −2.

16. ***Текстовые задачи*.**

Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 130 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 136 литров?

Решение.

Пусть вторая труба пропускает x литров воды в минуту, $x > 2$, тогда первая труба пропускает $(x - 2)$ литра в минуту. Составим таблицу по данным задачи:

	Производительность (л/мин)	**Время (мин)**	**Объём работ (л)**
Первая труба	$x - 2$	$\frac{136}{x-2}$	136
Вторая труба	x	$\frac{130}{x}$	130

Так как вторая труба заполнила резервуар на 4 минуты быстрее, получаем уравнение:

$$\frac{136}{x-2}-\frac{130}{x}=4$$

Решим уравнение:

$$\frac{136x-130x+260-4x^2+8x}{x(x-2)}=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-7x-130}{x(x-2)}=0\Leftrightarrow\frac{(2x+13)(x-10)}{x(x-2)}=0,$$

$x=10$ или $x=-6{,}5$. Отбрасывая постороннее решение $-6{,}5$, получаем, что вторая труба пропускает 10 литров в минуту.

Ответ: 10.

или

Турист идет из одного города в другой, каждый день, проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

Решение.

В первый день турист прошел $a_1 = 10$ км, во второй — a_2, …, в последний — a_6 км. Всего он прошел $S_n = 120$ км. Если каждый день турист проходил больше, чем в предыдущий день, на d км, то

$$S_n=\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}n,$$

Где $n = 6$ дней, $a_1 = 10$ км. Таким образом,

$$\frac{2\cdot10+5d}{2}\cdot6=120\Leftrightarrow5d=20\Leftrightarrow d=4.$$

Тогда за третий день турист прошел

$$a_3=a_1+2d=10+2\cdot4=18\text{км}.$$

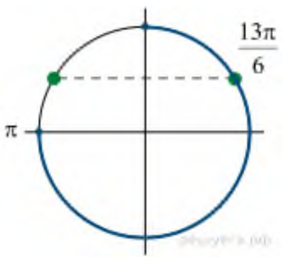
Ответ: 18.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

Для записи решений и ответов на задания 17-21 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (17, 18 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

17. ***<u>Уравнения, системы уравнений</u>***

а) Решите уравнение: $4\cos^2 x+4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1=0.$



б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$4-4\sin^2 x-4\sin x-1=0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x+4\sin x-3=0.$$

Значит, или $\sin x=-\frac{3}{2}$ — уравнение не имеет корней, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{13\pi}{6}$.

или

а) Решите уравнение $27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0$

б) Укажите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4\,; \log_3 10]$.

Решение.

а) Разложим левую часть на множители:

$$27^x-5\cdot 9^x-3^{x+2}+45=0 \Leftrightarrow 27^x-5\cdot 9^x-9\cdot 3^x+45=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^x(3^x-5)-9(3^x-5)=0 \Leftrightarrow (3^x-5)(9^x-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=5,\\ 9^x=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_3 5,\\ x=1.\end{array}\right.$$

б)

Поскольку $1<\log_3 4<\log_3 5<\log_3 10,$ отрезку $[\log_3 4;\ \log_3 10]$ принадлежит только корень $\log_3 5.$

Ответ: а) $\{1;\ \log_3 5\}$, б) $\log_3 5.$

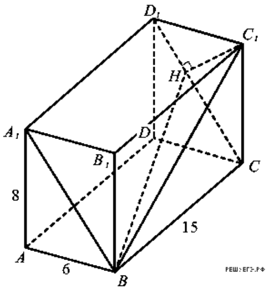
Примечание.

Можно было ввести замену $t=3^x$, получить уравнение и решить его разложением на множители:

$$t^3-5t^2-9t+45=0 \Leftrightarrow (t^2-9)(t-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=5,\\ t=\pm 3.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем решение.

18. ***Углы и расстояния в пространстве***



В прямоугольном параллелепипеде *$ABCDA_1B_1C_1D_1$* найдите угол между плоскостью *A_1BC* и прямой *BC_1*, если *AA_1* = 8, *AB* = 6, *BC* = 15.

Решение.

Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1 Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1. BH — проекция BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, нужно найти угол C_1BH.В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим:

$$C_1H = \frac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \frac{24}{5}.$$

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17.$

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим:

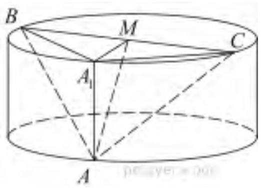
$$\sin B = \frac{C_1H}{BC_1} = \frac{24}{85}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{24}{85}.$

или

Высота цилиндра равна 5. Равнобедренный треугольник *ABC* с боковой стороной 14 и $\angle A = 120°$ расположен так, что его вершина *A* лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины *B* и *C* — на окружности верхнего основания. Найдите угол между плоскостью *ABC* и плоскостью основания цилиндра.

Решение.



Пусть AA_1 — образующая цилиндра, M — середина хорды BC. Тогда $AM=AB\cdot\cos 60° = 7$. Треугольники ABA_1 и ACA_1 равны по гипотенузе и катету. Значит, $BA_1 = A_1C$. В равнобедренных треугольниках BAC и BA_1C медианы AM и A_1M являются высотами. Поэтому искомый угол между плоскостями равен углу $\angle AMA_1$. В прямоугольном треугольнике AMA_1 имеем:

$$\sin \angle AMA_1 = \frac{AA1}{AM} = \frac{5}{7}, \qquad \angle AMA_1 = \arcsin\frac{5}{7}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{5}{7}.$

<u>19. Неравенства, системы неравенств.</u>

Решите систему неравенств $\begin{cases} 2^x + \frac{80}{2^x} \geq 21, \\ \log_{x-1}\left(\frac{x+1}{5}\right) \leq 0. \end{cases}$

Решение.

Заметим, что $2^x > 0$при всех значениях переменной, поэтому первое неравенство можно умножить на 2^x,не меняя его знака, откуда имеем:

$$4^x + 80 \geq 21 \cdot 2^x \Leftrightarrow 4^x - 21 \cdot 2^x + 80 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \geq 16, \\ 2^x \leq 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ x \leq \log_2 5. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство системы, используя теорему о знаке логарифма:

$$\log_{x-1}\left(\frac{x+1}{5}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \neq 2, \\ (x-2)\left(\frac{x+1}{5} - 1\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \neq 2, \\ (x-2)\cdot\frac{x-4}{5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 4.$$

Поскольку $2 < \log_2 5 < 3,$ получаем решение исходной системы неравенств: $2 < x \leq \log_2 5, x = 4.$

Ответ: $(2, \log_2 5] \cup \{4\}.$

или

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x+\dfrac{4x^2+5x}{x^2-x-6} \le \dfrac{9}{5x-15}+\dfrac{5x+1}{5x+10}, \\ 5^{x-1}+5\cdot(0,2)^{x-2} \le 26. \end{cases}$$

Решение.

Решим второе неравенство системы:

$$5^{x-1}+5\cdot(0,2)^{x-2} \le 26 \Leftrightarrow \frac{5^x}{5}+\frac{5\cdot 25}{5^x}-26 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5^{2x}-130\cdot 5^x+625 \le 0 \Leftrightarrow 5 \le 5^x \le 125 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3.$$

Рассмотрим первое неравенство системы на множестве [1; 3]. Преобразуем его правую часть:

$$\frac{9}{5(x-3)}+\frac{5x+1}{5(x+2)}=\frac{9x+18+5x^2-15x+x-3}{5(x+2)\cdot(x-3)}=\frac{5x^2-5x+15}{5(x+2)\cdot(x-3)}=\frac{x^2-x+3}{(x+2)\cdot(x-3)}.$$

Получаем:

$$x+\frac{4x^2+5x}{(x+2)\cdot(x-3)}-\frac{x^2-x+3}{(x+2)\cdot(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow x+\frac{4x^2+5x-x^2+x-3}{(x+2)\cdot(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{3x^2+6x-3}{(x+2)\cdot(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-x^2-6x+3x^2+6x-3}{(x+2)\cdot(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^3+2x^2-3}{(x+2)\cdot(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow$$

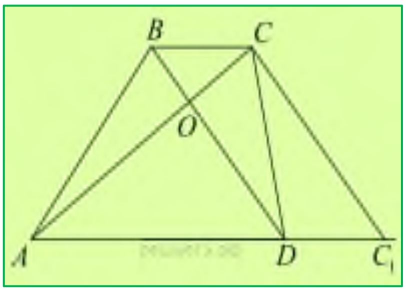
$$\Leftrightarrow \frac{x^3-x^2+3x^2-3}{(x+2)\cdot(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)+3(x-1)\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\cdot(x^2+3x+3)}{(x+2)\cdot(x-3)} \le 0.$$

Квадратный трехчлен $x^2+3x+3>0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, поскольку $D=9-12<0$. Кроме того, на [1; 3] $x+2>0$. Следовательно:

$$\frac{(x-1)\cdot(x^2+3x+3)}{(x+2)\cdot(x-3)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x < 3.$$

Ответ: $[1;\ 3)$.

<u>20. Планиметрические задачи</u>



Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15.
Сумма оснований равна 17.
а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.
б) Найдите площадь трапеции.

Решение.

а) Проведем через точку *C* прямую параллельную *BD*. На пересечении этой прямой и прямой *AD* отметим точку C_1, BCC_1D — параллелограмм.

В треугольнике ACC_1: $AC = 15$, $CC_1 = BD = 8$,
$AC_1 = AD + DC_1 = 17$.

Заметим, что $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$ поскольку $289 = 225 + 64$, тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ACC_1 — прямоугольный, угол ACC_1 прямой. Тогда угол *COD* прямой, что и требовалось доказать.

б) $$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60.$$

Ответ: б) 60.

или

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M , причём $AM = 5R$ и $CM = 1{,}5R$.

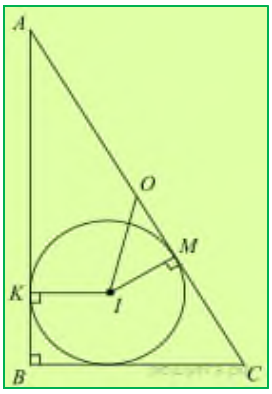
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 4$.

Решение.

а) Пусть вписанная окружность касается стороны AB в точке K. Обозначим $BK = x$. Пусть S — площадь треугольника, p — полупериметр. Тогда

$$p = 5R + 1{,}5R + x = 6{,}5R + x, \qquad S = pR = R(6{,}5R + x).$$



С другой стороны, по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{(6{,}5R+x)\cdot 5R \cdot 1{,}5R \cdot x} = R\sqrt{7{,}5x(6{,}5R+x)}.$$

Из уравнения $$R(6{,}5R+x) = R\sqrt{7{,}5x(6{,}5R+x)}$$ получаем, что $R = x$. Стороны треугольника ABC равны $6{,}5R$, $6R$ и $2{,}5R$, следовательно, этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине B.

б) Пусть I и O — центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Точка O — середина гипотенузы $AC = 6{,}5R = 26$, и $OM = CO - CM = 13 - 1{,}5R = 7$.

Тогда $$IO = \sqrt{OM^2 + MI^2} = \sqrt{7^2 + R^2} = \sqrt{65}.$$

Ответ: б) $\sqrt{65}$

21. Уравнения, неравенства и их системы с параметрами

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{5a}{a-3} \cdot 7^{|x|} = 49^{|x|} + \frac{6a+7}{a-3}$ имеет ровно два различных корня.

Решение.

Пусть $7^{|x|} = t$, $t \geq 1$. Если $t > 1$,то $|x| = \log_7 t \Leftrightarrow x = \pm \log_7 t$ — два корня. Если $t = 1$, тогда $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ — единственный корень.

Обозначим $f(t) = t^2 - \frac{5a}{a-3} \cdot t + \frac{6a+7}{a-3}$

Исходное уравнение имеет ровно два корня тогда и только тогда, когда уравнение $f(t) = 0$ имеет ровно один корень больший 1.

Уравнение $t^2 - \frac{5a}{a-3} \cdot t + \frac{6a+7}{a-3} = 0$ имеет ровно один корень, если дискриминант равен нулю:

$$\left(\frac{5a}{a-3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{6a+7}{a-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 44a + 84}{(a-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2, \\ a = -42. \end{array}\right.$$

При $a = -2$ уравнение $t^2 - 2t + 1 = 0$ имеет единственный корень $t = 1$. В этом случае исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

При $a = -42$ уравнение $t^2 - \frac{14}{3} \cdot t + \frac{49}{9} = 0$ имеет единственный корень $t = \frac{7}{3}$. В этом случае исходное уравнение имеет два корня.

Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Для того чтобы уравнение $f(t) = 0$ имело два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$f(1) < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{5a}{a-3} + \frac{6a+7}{a-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{2a+4}{a-3} < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 3.$$

Ответ: $a = -42$, $-2 < a < 3$.

Или

Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система $\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \le 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \ge 0 \end{cases}$ **имеет единственное решение.**

Решение.

Решение системы может быть единственным в двух случаях.

1 случай. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -3. \end{array} \right.$$

Если $x = 1$, то $a + 2(a+1) + a + 1 = 0$, а значит, $a = -\frac{3}{4}$. При этом значении a система принимает вид:

$$\begin{cases} -7x^2 - 6x + 13 \le 0, \\ -3x^2 + 2x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -\frac{13}{7}, \\ x \ge 1. \end{array} \right., \\ -\frac{1}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$

Единственное решение $x = 1$.

Если $x = -3$, то $9a - 6(a+1) + a + 1 = 0$ и $a = -\frac{5}{4}$. Система принимает вид:

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 21 \le 0, \\ 5x^2 + 18x + 9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \le x \le -3, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ x \ge -\frac{3}{5} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow -7 \le x \le -3.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.

2 случай. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} a^2-(a-1)(a+4)=0, \\ a-1>0. \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{4}{3}.$$

При этом первое неравенство имеет единственное решение $x=-4$ которое удовлетворяет второму неравенству.

Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+1)^2-a(a+1)=0, \\ a<0. \end{cases} \Leftrightarrow a=-1.$$

При этом второе неравенство имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $-\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$.